УДК 51(09)

ІСТОРІЯ ДОПОМАГАЄ ПОШУКАМ

З.Ю.ФІЛЕР

Рассматривается история решения неравенств в комплексном множестве от леммы Д'Аламбера до работ А.В.Кужеля и автора. Показано, как работы прошлого могут стать источником новых идей.

The history of solutions in a complex set of inequalities is considered from the lemma d'Alembert to the works of A.V.Kuzhel and author. Here, it's shown how the work of the past can be a source of new ideas.

У 1950-51 навч. році автор познайомився з книгою [1], написаною цікаво й доступною мовою. Особливо сподобався історичний огляд розвитку теорії алгебраїчних рівнянь, розповіді про судьби її творців. Зацікавило доведення основної теореми алгебри, **лема Д'Аламбера.** Здалося, що саме вона є основою доведення Гаусса 1799 г.; виглядало зовсім логічним застосування пошуку *комплексного* розв'язку h нерівності $ah^k / f(x_0) < 0$ при комплексних $a, f(x_0)$ і натуральному k. Там знаходилося значення h, при якому $\arg(ah^k / f(x_0)) = \pi$. Далі визначалося достатнє значення модуля, яке гарантувало виконання нерівності $|f(x_0+h)|<|f(x_0)|$. Таким чином, конструювався *алгоритм* побудови збіжної в собі послідовності $\{f(x_k)\}$, яка вела до кореня многочлену $f(x)$, бо $f(x_k)\to 0$. Тоді автор ще не знав теорії дійсних чисел та замкненості комплексної площини. Приклад знаходження комплексного h не свідчив про існування комплексних розв'язків нерівностей *взагалі* і методів їх знаходження.

Автор неодноразово розповідав студентам доведення леми Д'Аламбера, звертаючи увагу на *циклічний* характер побудови послідовності $x_k \to \bar{x}$, яка веде до якогось кореня рівняння $f(x)=0$: $x_k \to \bar{x}$. Але вже тоді звертав увагу на контр приклад – не існує кореня у рівняння $e^x=0$, хоча побудувати збіжну до 0 послідовність $\{f(x_k)\}$ можна від будь-якого комплексного x_0. Ситуація пояснюється рис. 1.

Знайомство з шкільними підручниками, роздуми про методику розв'язання рівнянь та нерівностей, привели до пропозиції використовувати *метод нев'язки* розв'язання нерівностей [2]. У 1999 р. автор запропонував тему дипломної роботи «Нерівності в науці та навчанні», де порадив застосувати цей метод до «шкільних» нерівностей. У випадку відсутності *дійсних* розв'язків, він дає *комплексні* розв'язки. Суть метода полягає в тому, що в меншу частину додається нев'язка $r>0$, що перетворює нерівність в *рівняння з параметром*. Наприклад, нерівність $x^2+4x+5<0$ дає рівняння $x^2+4x+5+r=0$, корені якого

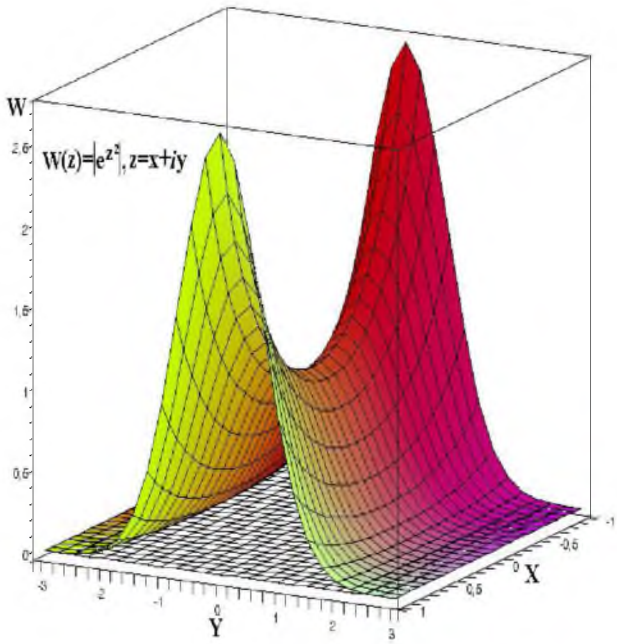

Рис. 1

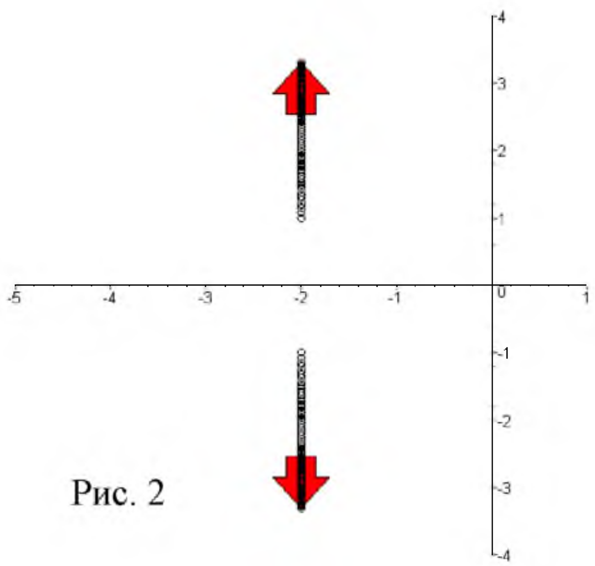

Рис. 2

$x(r) = -2 \pm i\sqrt{1+r}$ при $r > 0,$ дають множину комплексних розв'язків (рис.2).

У 1999 р. в Одеському університеті відбулася наукова конференція, присвячена 200-річчю доведення Гауссом основної теореми алгебри (ОТА). Ми в тоді сформулювали *теорему про нерівності*: *многочленна нерівність* $f(x) < 0$ $(f(x) > 0)$ *з довільними комплексними коефіцієнтами* a_k *має хоча б комплексні розв'язки.* Її доведення миттєво випливає з ОТА, бо нерівність зводиться до рівняння з вільним членом $a_0 + r$ $(a_0 - r)$. Ясно, що її міг запропонувати й сам Гаусс ще 200 років до того. Цікаво, як через майже 50 років поштовх, наданий елементом доведення леми Д'Аламбера, спрацював у пошуку комплексних розв'язків.

Г.М.Шапіро, автор [1], відсутній у довіднику [3]. Він народився в 1903 р. в Одесі. У 1921 р. вступив у ОІНО, де працювали відомі геометри С.О.Шатуновський й В.Ф.Каган. Там зблизився з М.Г.Крейном и Ф.Р.Гантмахером. В 1925 р. С.О.Шатуновський пише на своїй книзі: «Моему любимому и глубоко уважаемому ученику Г.М.Шапиро от автора». У 1926 р. він вступив у Москві в аспірантуру к В.Ф.Кагану. Працював у семінарі по векторному и тензорному аналізу. В 1935 р. видана книга «Высшая алгебра», яка за 3 роки витримала 4 видання (вона була перекладена й на українську мову). З 1929 до 1941 рр. він професор Моспедінституту, з 1935 р. працює й в МДУ. Після участі в московському ополченні по стану здоров'я звільняється з Армії й приїздить у Куйбишев, до евакуйованої родини. Там він стає першим завідувачем кафедрою математики створюваного авіаінституту. Там він вмирає в 1942 р., проживши, на жаль, тільки 39 років.

Пізніше автор розглянув й метод *комплексної нев'язки*, коли $r = s + it, s > 0, \forall t.$ При $s = 0$ необхідно $t > 0$ Готуючи лекції з курсу «Числові системи», автор познайомився з книгою [4, с.31-32, 34] українського автора. Процітуємо її. «Зауважимо, що досить поширеною є думка про неможливість упорядкувати множину комплексних чисел, тобто ввести у множині **C** відношення < або >. Насправді це не так. Домовимося комплексне число z=a+bi вважати меншим за комплексне число λ=c+di і писати: z<λ, якщо a<c, або якщо a=c і b<d. Наприклад: 100i<2<2+i<3-500i Визначене так відношення < у множині комплексних чисел: а) *антисиметричне* – якщо z<λ, то відношення λ<z неможливе; в) *транзитивне* – якщо z<λ, λ<μ, то z<μ; в) *зв'язне* – якщо z≠λ, то або z<λ, або z>λ. …комплексні числа можна за певними правилами порівнювати.

Примітка. Крім поняття «упорядкована множина» є ще поняття «упорядковане *поле*». Поле комплексних чисел упорядкувати не можна, тому що крім вимог антисиметричності, транзитивності і зв'язності для упорядкованого поля повинна виконуватись ще одна умова: якщо a>0, то a^2>0. А ввести відношення >, для якого виконувалися б всі чотири умови, в множині комплексних чисел не можна.». Серед вправ є 4. *Розмістити* числа 3+5i, 2i, 3-5i, 2 у порядку зростання; 5. *Розв'язати нерівність* (2+i)z<1-i». Відповідей на них не дано, як не дано й правила розв'язання вправи 5.

Зберегти шкільні правила (при діленні на *додатне* число знак нерівності зберігається), то розв'язком буде: z<(1-i)/(2+i)=(1-3i)/5 тут не вдається [6].

Розв'яжемо цю нерівність методом «комплексної нев'язки» r=s+it, яку додаємо в ліву (меншу) частину нерівності: (2+i)(x+iy)+s+it=1-i⇒2x -y+s=1, x+2y+t= -1, s>0,∀t або при s=0, t>0. На відміну від методу дійсної нев'язки, яка дає відрізок *прямої*, метод *комплексної нев'язки* дає *півплощину* – двомірний об'єкт – множину точок z(s,t). Метод *дійсної* нев'язки дає його z(s,0). Навіть для дійсних нерівностей можна розглядати *комплексні розв'язки*. Для прикладу $2x < 3$, замість числової *півосі* $x<3/2$ буде пі*вплощина* $x<3/2,\ \forall y$ с частковою границею x=1.5, y<0; комплексний розв'язок з дійсною нев'язкою дає одномірну множину, а з комплексною нев'язкою – двовимірну.

На жаль, у [3] немає згадки про автора [4]. У «Математика в СССР 1958 – 1967. Т.2» на с. 704 читаємо: «Кужель Александр Васильевич, род. 19 февр. 1930 г. в г. Николаеве, окончил Николаевский пед. ин-т (1954), канд. физ.-матем. наук (1960), доцент (1962)». Там наведена бібліографія з 23 назв. У своїй «Математичній автобіографії» (Сімферополь, 1999) він наводить ще 76 назв. Книга [4] міститься там під номером 36. З 1958 р. він працює в Уманському педінституті, і захищає в 1959 р. кандидатську дисетацію. У 1969 р. він захистив докторську дисертацію. Опонентами були М.С. Лівшиць, І.С. Іохвідов, Ю.Л. Далецький. Зовнішній відгук написав М.Г.Крейн. Перший з опонентів працював в Кіровограді зразу після війни. Учень М.Г.Крейна, Ю.Л. Далецький, працював у Київській політехніці, а його вчитель деякий час працював у Сталіно (Донецьку). В Умані Кужель завідував кафедрою і був деканом фізмату. У 1970 р. О.В.Кужель перейшов до новоствореного Сімферопольського університету. З жалем я узнав, що його вже немає. Його син зараз працює в Інституті математики НАН України.

Квадратні нерівності в широкому смислі розглянуто також на прикладі $x^2+4x+5<0$. Методом комплексної нев'язки s+it для комплексного аргументу x+iy; отримаємо лінії $y^2-(x+2)^2=1+s$, $2(x+2)y=-t$; s>0, при s=0 и t>0. Це **гіперболи** з вертикальним розташуванням вершин на прямій x=-2, та півосями $a=b=\sqrt{1+s}$ и граничною пів гіперболою при s=0 [6, с. 7]. Вона зображена там товстою лінією. При нерівностях у вузькому смислі, була тільки дійсна ві**сь** цих гіпербол. Нерівність $x^2+4x+3>0$ еквівалентна рівнянням $(x+2)^2-y^2=1+s$, $2(x+2)y=t$, $s>0$; при $s=0\Rightarrow t>0$. При $s>0$ це гіперболи з вершинами на оси 0x. При s=0 отримаємо граничну гіперболу (рис. 3).

Розглянемо ще приклад $x^2+4x+5>0$. У множині дійсних чисел розв'язком будуть всі точки дійсної осі. Для пошуку комплексних розв'язків застосуємо спочатку метод дійсної нев'язки $r>0$: $x^2+4x+5=r$, звідки $x=-2\pm\sqrt{4-(5-r)}=-2\pm\sqrt{r-1}$. При $r\geq1$ отримаємо дійсні розв'язки; $r<1$ дасть *комплексні* значення $x=-2\pm i\sqrt{1-r}$. Розв'язки зображуються у вигляді хреста з нескінченою горизонтальною поперечиною [6, рис. 8]. Методом комплексної нев'язки s+it для комплексного аргументу x+iy, отримаємо лінії $y^2-(x+2)^2=1-s$, $2(x+2)y=t$, $1>s>0$; при s=0 і t>0. Це **гіперболи** з горизонтальним розташуванням вершин на прямій y=0. Асимптоти гіпербол належать області розв'язків при s=1.

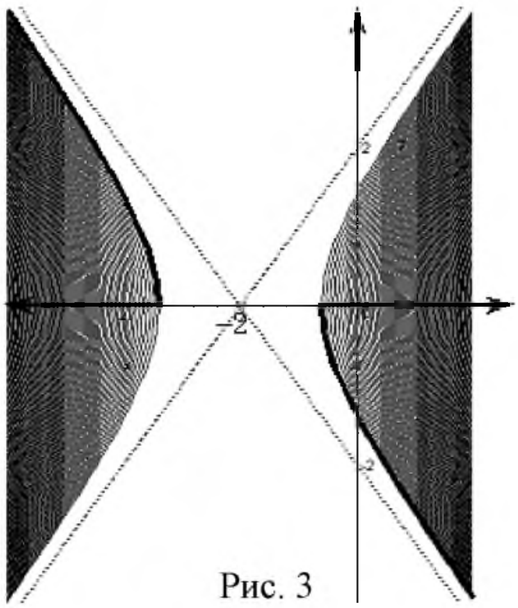

Рис. 3

Нерівність a<f(z)<b еквівалентна рівнянню з комплексною нев'язкою $r=$ s+it=(f(z)-a)/(b-a)≡φ(z), бо вона еквівалентна рівнянню $f(z)=a+r(b-a)$. Переходячи до дійсної та уявної частин функції φ(z)= u(x,y)+ iv(x,y), $0<s<1$, ∀t; при s=0 буде лінія u(x,y)=0; v(x,y)>0 з тої сторони півплощини, куди «дивиться» gradu(x;y). Границя включена там, куди «показує» gradv(x,y) від точки перетину u(x,y)=0, v(x,y)=0. При s=1 – друга *границя* області; її частина, з перпендикуляром -gradv(x,y), включена в область - розв'язок.

Описаний спосіб порівняння комплексних чисел не єдиний. Можна вводити відношення < для комплексних чисел в тригонометричній формі, вважаючи меншими числа, у яких модуль менше; якщо їх модулі рівні, менше те число, у якого аргумент менше (при цьому аргументи беруться з відрізку [0, 2π).

* * *

Ми розповіли, як може допомогти історія математики розвитку навіть усталеної, освяченої традиціями, галузі. Перехід до погляду на розв'язання нерівностей як на пошук множини точок, які визначаються «додатним» комплексним параметром r, *структурує* множину розв'язків. Це дає змогу застосовувати для її побудови сучасні ЕОМ, які мають для цього відповідні програми. Сепарабельність множини $s = u(x, y), t = v(x, y)$ дає можливість прийняти достатньо густу сітку в шуканій області.

Нами запропонований алгоритм знаходження комплексних коренів функцій $f(x)$, які приймають дійсні значення при дійсних значеннях аргументу. Він ґрунтується на *теоремі*: точка x_0 додатного мінімуму увігнутого графіка функції $f(x)$ є дійсною частиною комплексного кореня рівняння $f(x)=0$. Аналогічне твердження є для опуклого від'ємного максимуму. Це випливає із локальної заміни $f(x)$ її многочленом Тейлора в околі точки x_0: $f(x_0 + iy) \approx f(x_0) + f''(x_0)/2(x - x_0)^2$, Тоді наближення до уявної частини кореня є $y = \sqrt{2f(x_0)/f''(x_0)}$. Далі можна застосувати алгоритм уточнення, наприклад, методом Ньютона: $z_1 = z_0 - \dfrac{f(z_0)}{f'(z_0)}$. Знаменник тут не рівний 0 для простого кореня. Зараз в навчальних посібниках пропонують від рівняння для комплексного $z = x + iy$ переходити до *системи* рівнянь $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = 0, \operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = 0$ [5]. Тут значною проблемою є пошук початкового наближення z_0.

Посилання

[1] Шапиро Г.М. (1938) *Высшая алгебра. Учебник для педвузов.* Изд. 4. – М.: Учпедгиз

[2] Ткаченко С.П., Філер З.Ю. (2003) Комплексні розв'язки квадратної нерівності// *Матем. в школі,* №2. – С. 47–49.

[3] Бородин А.И., Бугай А.С. (1987) В*ыдающиеся математики: Биогр. слов. - справ.* 2-е изд., пер. и доп. – К.: Рад. шк.

[4] Кужель О.В. (1974) *Розвиток поняття про число. Ознаки подільності. Досконалі числа.* – Київ: Вища школа.

[5] Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. (2006) *Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9* (Самоучитель). – М.: НТ Пресс.

[6] Филер З.Е. (2010) Неравенства в различных полях// *Наукові записки.- Вип. 69.- Серія: Математичні науки.* – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. Винниченка. – С. 108–113.